一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1、设 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$，则 $BA^T=$________.

2、设 $\begin{matrix}2&0\\0&3\end{matrix}X=\begin{matrix}4&2\\1&0\end{matrix}$，则 $X=$________.

3、行列式 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&b&0\\1&1&c\end{vmatrix}=$________________________.

4、已知行列式 $|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=12$，则行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|=$_____.

5、已知 $\alpha_1=[-2,1,4]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T$ 满足 $3\alpha_2+2x=\alpha_1$，则 $x=$_________.

6、设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1,0,1$，则 $|A^3+2A|=$ ________.

7、已知 $P(A)=0.4,P(B|A)=0.7$，则 $P(AB)=$_____.

8、某射手向同一目标射击 50 次，每次击中目标的概率为 $p=0.6$，请用算式表示“50 次射击至多击中 1 次”的概率：______________________________.

9、随机变量 $X\sim U(1,5)$，则 $P\{-2<X<2\}=$ ____.

10、设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}Ae^{-2x}, & x>0\\0, & x\le 0\end{cases}$，则 $A=$______.

11、1、设 $\alpha=[1,2,3]^T,\beta=[1,-1,2]^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $A^2=$_________.

12、设 $A=\begin{matrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&3\end{matrix}$，$B=\begin{matrix}2&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{matrix}$，则 $\det(AB)=$____________.

13、已知 $\alpha_1=[1,2,4]^T$，$\alpha_2=[2,0,t]^T$，$\alpha_3=[3,8,10]^T$ 线性相关，则 $t=$_______.

14、线性方程组 $\begin{matrix}3&2&-4\\1&3&1\end{matrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}=\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 的基础解系为_________.

15、若 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,2,3$，则行列式 $\det(A^{-1}+I)=$_______.

16、已知 $P(A)=0.4,P(A-B)=0.3$，则 $P(AB)=$_____.

17、已知随机变量 X 满足 $EX=-2,DX=4$，则 $E(3X^2+1)=$ ___________.

18、设 $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}A=$_________.

19、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$_________.

20、矩阵 $\begin{matrix}1&3&4\\2&4&6\end{matrix}$ 的秩等于_________.

21、齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3&=&0\\3x_1-x_2+2x_3&=&0\end{cases}$ 的基础解系为____________.

22、已知 $P(A)=0.4,P(B)=0.6,P(B|A)=0.7$，则 $P(A+B)=$_____.

23、已知连续性随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则 X 落在 a 和 b 之间的概率可以写成定积分

24、已知随机变量 $X\sim N(0,1)$，随机变量 $Y=2X-1$，则 $Y\sim$______.

25、设 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3&0\\1&0\end{bmatrix}$，则 $BB^T-4AC=$__________.

26、若 $\begin{matrix}1&2&0\\0&1&2\\2&k&1\end{matrix}\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}=\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}$ 有唯一解，则常数 $k=$_________.

27、已知 $\alpha_1=[-2,1,4]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T$，则 $3\alpha_1-2\alpha_2=$__________.

28、设 $\xi=\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}$ 是矩阵 $A=\begin{matrix}a&1\\4&3\end{matrix}$ 的一个特征向量，则常数 $a=$__________.

29、A、B、C 为三个随机事件. 则事件“A、B、C 至少有一个发生”可表示为________，事件“A、B、C 至多有一个发生”可表示为________________.

30、设随机变量 X 服从参数为 4 的指数分布，则 $P\{|X|<1\}=$__________.

31、设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&0&6\end{bmatrix}$，则 $B^TA=$__________.

32、设矩阵 $A=\begin{matrix}3&2&1\\2&4&0\\3&0&0\end{matrix}$，则 $\det(AA^T)=$______________.

33、已知方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+kx_3&=&1\\2x_1+4x_2+8x_3&=&3\end{cases}$ 无解，则常数 $k=$________.

34、已知 $\alpha_1=[1,1,0,1]^T$，$\alpha_2=[0,1,t,4]^T$，$\alpha_3=[2,1,-2,-2]^T$ 线性相关，则 $t=$____.

35、矩阵的 $A=\begin{matrix}1&2&0\\0&2&2\\0&8&2\end{matrix}$ 全部特征值为________________.

36、设随机变量 $X\sim N(4,\sigma^2)$，且 $P\{X\ge 8\}=0.2$，则 $P\{0<X<4\}=$_______.

37、设矩阵的 $A=\begin{matrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{matrix}$ 的秩 $r(A)=2$，则 $a=$_____.

38、某份试卷由 50 个单选题构成，每题有 4 个选项，正确得 2 分，不选或选错得 0 分. 如果学生甲选对任一题的概率为 0.8，则该生成绩的期望值为______，标准差为____.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、A 为 2 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|(2A)^{-1}|=$ 【 】
A、$\frac{1}{8}$ B、$\frac{1}{4}$ C、1 D、2

2、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，则下列是 $Ax=0$ 的解是 【 】
A、$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ B、$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ C、$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ D、$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$

3、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若要向量组 $k\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，则实数 k 需满足的条件是 【 】
A、$k=-1$ B、$k\ne -1$ C、$k=1$ D、$k\ne 1$

4、射击 2 次，$A_i=$“第 i 次射击击中目标”，则事件 A_1+A_2 表示 【 】
A、全部击中 B、至少击中一次 C、至多击中一次 D、一次也没击中

5、已知随机变量 $X\sim b(n,p)$，且 $EX=2.4$，$DX=1.44$，则 【 】
A、$n=4,p=0.6$ B、$n=6,p=0.4$ C、$n=8,p=0.3$ D、$n=24,p=0.1$

6、设 A,B,C 为 n 阶方阵，若 $ABC=I$，则 【 】
A、$ACB=I$ B、$BAC=I$ C、$BCA=I$ D、$CBA=I$

7、设 $P(A)=a,P(B)=b$，$P(A+B)=c$，则 $P(A\bar{B})=$ 【 】
A、$a-b$ B、$c-b$ C、$a(1-b)$ D、$b-a$

8、设有矩阵 $A_{2\times 3},B_{3\times 4},C_{4\times 2}$，则下列运算无意义的是 【 】
A、$C+(AB)^T$ B、ABC C、$(CA)^T-B$ D、C^TB

9、设 A 是可逆矩阵，则下列命题中错误的是 【 】
A、A^T 必可逆 B、A^2 必可逆 C、$-2A$ 必可逆 D、$A-I$ 必可逆

10、已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是 【 】
A、$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ B、$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$
C、$\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2$ D、$\alpha_1,2\alpha_3,3\alpha_1-4\alpha_3$

11、设 2 阶方阵 A 满足 $A^2-I=O$，则必有 【 】
A、$A=I$ B、$A=-I$ C、$A=A^{-1}$ D、$A=A^T$

12、方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+6x_3&=&0\\4x_2-8x_3&=&-4\\x_1+3x_2-2x_3&=&-2a\end{cases}$ 有解的充要条件是 【 】
A、$a=2$ B、$a=-2$ C、$a=3$ D、$a=-3$

13、下列向量组中,线性无关的向量组是 【 】
A、$(1,2,3),(5,6,7),(0,0,0)$ B、$(1,2),(2,1),(1,1)$
C、$(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$ D、$(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$

14、设每次试验成功的概率为 p（$0<p<1$），则在 2 次重复试验中试验至少失败一次的概率为
【 】A、p^2 B、$1-p^2$ C、$(1-p)^2$ D、$(1-p)^2+p(1-p)+p^2$

15、已知随机变量 $X\sim N(2,4)$，且随机变量 $Y=ax+b\sim N(0,1)$，则 【 】
A、$a=2,b=2$ B、$a=-2,b=2$ C、$a=0.5,b=-1$ D、$a=0.5,$

16、设 A,B 为任意 n 阶矩阵，则下列命题中正确的是 【 】
A、$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ B、$(A+I)(A-I)=(A-I)(A+I)$
C、$(AB)^2=A^2B^2$ D、$AB^T=BA^T$

17、设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 $P\{|X|>2\}$ 的概率为 【 】
A、$2[1-\Phi(2)]$ B、$2\Phi(2)-1$ C、$2-\Phi(2)$ D、$1-2\Phi(2)$

18、已知随机变量 X 服从参数为 4 的指数分布，则 $\frac{EX}{DX}=$ 【 】
A、0 B、1 C、2 D、4

19、设 A,B 为 n 阶对称矩阵，则下列命题中正确的是 【 】
A、AB 必是对称矩阵 B、$A-B$ 必是反对称矩阵

C、$(AB)(AB)^T$ 必不是对称矩阵 D、$2A^T+3B$ 必是对称矩阵

20、将一枚骰子抛掷两次，若先后出现的点数分别为 b,c，则方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率为
【 】 A、$\frac{19}{36}$ B、$\frac{1}{2}$ C、$\frac{5}{9}$ D、$\frac{17}{36}$

三、（本题满分 10 分）

已知矩阵 A、X 满足 $AX+I=A^2-X$，且 $A=\begin{matrix}3&1\\2&0\end{matrix}$，求矩阵 X.

四、（本题满分 10 分）

说明齐次线性方程组 $\begin{cases}4x_1-x_2+x_3&=&0\\x_1+2x_2+x_3&=&0\\-3x_1+3x_2&=&0\end{cases}$ 有非零解，并求其通解.

五、（本题满分 10 分）

设 $X\sim N(1,4)$. 已知 $\Phi(1.25)=0.8944,\ \Phi(2.25)=0.9878$. 求：（1）$P\{X>3.5\}$；（2）$P\{|X|\le 3.5\}$.

六、（本题满分 10 分）

已知随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x, & 0<x<3\\0, & \text{其他}\end{cases}$.

求：（1）X 落在区间 $(1,2)$ 内的概率；（2）X 的数学期望 EX 和方差 DX；
（3）随机变量 $Y=3X-2$ 的方差 DY.

(二/四)说明线性方程组 $\begin{cases}4x_1-x_2+x_3&=&1\\x_1+2x_2+x_3&=&4\\-x_1+x_2+x_3&=&0\end{cases}$ 有唯一解，并用克拉默法则求出此唯一解.

(五/四)、(本题满分 10 分)

设 $A=\begin{matrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{matrix}$. （1）求 A 和 $(I-A^{-1})$ 的特征值；

(五/五)、(本题满分 10 分)

已知随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2\\-\frac{1}{4}x+b, & 2\le x\le 4\\0, & \text{其他}\end{cases}$，且 $EX=2$. 求：（1）参数 a,b 的值；（2）概率 $P\{1<X<3\}$；（3）X 的方差 DX.

华东理工大学继续教育学院成人教育

一、填空题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、数乘、乘法和转置）. 要注意矩阵乘法不满足交

换律.

解答：$A^T=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$，则 $BA^T=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times(-1)&1\times2+0\times0\\2\times1+3\times(-1)&2\times2+3\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}$.

分析：第 2 题考察的知识点是计算矩阵方程 $AX=B$ 的解 $A^{-1}B$. 要注意一些特殊矩阵的求逆公式，比如 $\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{matrix}d&-b\\-c&a\end{matrix}$（两调一除）以及 $\begin{matrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{matrix}^{-1}=\begin{matrix}\lambda_1^{-1}&0\\0&\lambda_2^{-1}\end{matrix}$. 另外要注意类似的矩阵方程 $XA=B$ 的解是 BA^{-1}，而不是 $A^{-1}B$.

解答：$X=\begin{matrix}2&0\\0&3\end{matrix}^{-1}\begin{matrix}4&2\\1&0\end{matrix}=\begin{matrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{matrix}\begin{matrix}4&2\\1&0\end{matrix}=\begin{matrix}2&1\\\frac{1}{3}&0\end{matrix}$.

分析：第 3 题考察的知识点是行列式的计算. 要注意对于简单的 2、3 阶行列式，可以使用对角线法则直接计算出结果.

解答：$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&b&0\\1&1&c\end{vmatrix}=a\quad b\quad c+0\quad 0\quad 1+1\quad 1\quad 1-1\quad b\quad 1-0\quad 1\quad c-a\quad 0\quad 1=abc+1-b$.

分析：第 4 题考察的知识点是行列式的性质. 要注意区分行列式与矩阵运算上的异同.

解答：由于 $|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$，又由题知 $|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3|=12$，因此 $3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=12$，解得 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=4$，从而 $|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=8$.

分析：第 5 题考察的知识点是向量的运算. 要注意向量作为特殊的矩阵，在运算上既要遵从矩阵运算的要求，也有自己的特殊情形.

解答：$x=\frac{1}{2}(\alpha_1-3\alpha_2)=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

分析：第 6 题考察的知识点是特征值的性质.

解答：设 $f(\lambda)=\lambda^3+2\lambda$，则有 $f(A)=A^3+2A$. 由题 A 的特征值为 $-1,0,1$，按特征值的谱映射定理，可知 $f(A)$ 的特征值为 $f(-1),f(0),f(1)$，即 $-3,0,3$. 再根据矩阵的行列式等于其所有特征值之积，可知 $|A^3+2A|=(-3)\quad 0\quad 3=0$.

分析：第 7 题考察的知识点是乘法公式.

解答：$P(AB)=P(B|A)P(A)=0.7\times0.4=0.28$.

分析：第 8 题考察的知识点是二项概型的计算公式.

解答：$P\{50\text{ 次射击至多击中 1 次}\}=P\{50\text{ 次射击击中 0 次}\}+P\{50\text{ 次射击击中 1 次}\}$
$=C_{50}^0\quad 0.6^0\quad 0.4^{50}+C_{50}^1\quad 0.6\quad 0.4^{49}$.

分析：第 9 题考察的知识点是均匀分布的概率计算. 要注意随机变量取正值的范围.

解答：因为 $X\sim U(1,5)$，所以 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{5-1}, & 1<x<5\\0, & \text{其他}\end{cases}$，从而

$$P\{-2<X<2\}=\int_{-2}^{2}p(x)dx=\int_{-2}^{1}0dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{4}dx=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

分析：第 10 题考察的知识点是指数分布的概率密度，或者连续性随机变量概率密度的性质（规范性）.

解答：参数为 λ 的指数分布的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\0, & x\le 0\end{cases}$，对照概率密度的形式可知 $A=2$.

另外按概率密度的性质（规范性），必须成立 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$，因此

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{+\infty}Ae^{-2x}dx$$

$$=0-\frac{1}{2}Ae^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}(\lim_{x\to+\infty}Ae^{-2x}-A)=\frac{1}{2}A,$$

也可解得 $A=2$.

分析：第 11 题考察的知识点是矩阵的方幂. 要注意利用矩阵乘法的结合律简化计算，尤其是高次幂的计算.

解答：$\beta^T\alpha=[1,-1,2]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=5$，$A=\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,-1,2]=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&-3&6\end{bmatrix}$，

$$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T=5\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\3&-3&6\end{bmatrix}.$$

分析：第 12 题考察的知识点是行列式的性质和计算. 要注意特殊行列式的计算公式.

解答：$\det(A)=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$，$\det(B)=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}=2\quad 2\quad 3=12$，

因此 $\det(AB)=\det(A)\det(B)=(-1)\cdot12=-12$.

分析：第 13 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判定方法. 要注意当向量组中向量个数等于向量的维数时，可以利用行列式法来判定向量组的线性相（无）关性.

解答：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&8\\4&t&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&0\\4&t&-6\end{vmatrix}$

$$=2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&-1\\t&6\end{vmatrix}=-2(12+t),$$

因为 α_1，α_2，α_3 线性相关，所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=0$，即 $t=-12$.

分析：第 14 题考察的知识点是解齐次线性方程组.
要注意基础解系不唯一.

解答：$A=\begin{matrix}3&2&-4\\1&3&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}0&-7&-7\\1&3&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&3&1\\0&1&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&0&-2\\0&1&1\end{matrix}$

即得同解方程组 $\begin{cases}x_1-2x_3&=&0\\x_2+x_3&=&0\end{cases}$.

令 $x_3=C$，则 $\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}=\begin{matrix}2C\\-C\\C\end{matrix}=C\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}$，故所求基础解系为 $\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}$.

分析：第 15 题考察的知识点是矩阵多项式的谱映射定理，即关于 A 的矩阵多项式的特征值与 A 的特征值之间的关系，以及矩阵特征值的性质.

解答：设 $f(\lambda)=\lambda^{-1}+1$，则有 $f(A)=A^{-1}+I$. 由题 A 的特征值为 $1,2,3$，按谱映射定理，可知 $f(A)=A^{-1}+I$ 的特征值为 $f(1),f(2),f(3)$，即 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3}$. 由于矩阵的行列式等于其所有特征值之积，因此行列式 $\det(A^{-1}+I)=2\quad\frac{3}{2}\quad\frac{4}{3}=4$.

分析：第 16 题考察的知识点是事件差的概率公式，
即 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$.

解答：$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4-0.3=0.1$.

分析：第 17 题考察的知识点是期望的性质和方差的计算公式.

解答：因为 $DX=EX^2-(EX)^2$，所以 $EX^2=DX+(EX)^2=4+(-2)^2=8$，

从而 $E(3X^2+1)=E(3X^2)+E1=3E(X^2)+1=3\cdot8+1=25$

分析：第 18 题考察的知识点是矩阵乘法和初等矩阵的性质. 要注意掌握初等矩阵与初等变换的关系，以及初等矩阵的求逆公式，比如 $R_{ij}(-k)^{-1}=R_{ij}(k)$.

解答：显然 $B=R_{32}(2)$，则 $B^{-1}=R_{32}(2)^{-1}=R_{32}(-2)$.

从而 $B^{-1}A=R_{32}(-2)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&2\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&0\\-2&1&4\\1&0&-1\end{bmatrix}$.

分析：第 19 题考察的知识点是特殊矩阵求逆矩阵的公式，

即 $\begin{matrix}A_1&0\\0&A_2\end{matrix}^{-1}=\begin{matrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{matrix}$ 以及

$\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{matrix}d&-b\\-c&a\end{matrix}$（两调一除）.

分析：第 20 题考察的知识点是矩阵秩的计算.

解答：$\begin{matrix}1&3&4\\2&4&6\end{matrix}\to\begin{matrix}1&3&4\\0&-2&-2\end{matrix}$，阶梯形矩阵中有两个非零行，所以所求秩为 2.

本题也可以利用向量组线性相（无）关性的几何意义。矩阵的两个行向量对应分量不成比例，因此不平行，

这两个行向量线性无关，即对应的矩阵秩为2.

分析：第 21 题考察的知识点是解齐次线性方程组．要注意基础解系不唯一.

解答：$A=\begin{matrix}1&2&3\\3&-1&2\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\0&-7&-7\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&2&3\\0&1&1\end{matrix}\quad\begin{matrix}1&0&1\\0&1&1\end{matrix}$

即得同解方程组为$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$.

令$x_3=C$，则 $\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}=\begin{matrix}-C\\-C\\C\end{matrix}=C\begin{matrix}-1\\-1\\1\end{matrix}$，故所求基础解系为$\begin{matrix}-1\\-1\\1\end{matrix}$.

分析：第 22 题考察的知识点概率的乘法公式和加法公式.

解答：$P(AB)=P(B|A)P(A)=0.7\times0.4=0.28,$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.6-0.28=0.72$.

分析：第 23 题考察的知识点是连续型随机变量的概率计算公式，即X落在a和b之间的概率$P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)dx$.

分析：第 24 题考察的知识点是正态分布随机变量的线性函数的分布．注意正态分布随机变量的线性函数的分布仍然是正态分布，并且其期望和方差可以利用相关性质计算出来.

解答：$EY=E(2X-1)=2EX-1=2\times0-1=-1$，

$DY=D(2X-1)=2^2DX=4\times1=4$，所以$Y\sim N(-1,4)$.

分析：第 25 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、数乘、乘法和转置）．要注意矩阵乘法不满足交换律.

解答：$BB^T-4AC=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}[2,1]-4\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2&0\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2\\-22&1\end{bmatrix}$.

分析：第 26 题考察的知识点是克拉默法则．要注意齐次线性方程组是特殊的非齐次线性方程组.

解答：由于线性方程组有唯一解，根据克拉默法则，系数行列式$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&2\\2&k&1\end{vmatrix}=0$，解得$k=4.5$.

分析：第 27 题考察的知识点是向量的运算．要注意向量作为特殊的矩阵，在运算上要遵循矩阵运算的要求.

解答：$3\alpha_1-2\alpha_2=3\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\3\\14\end{pmatrix}$.

分析：第 28 题考察的知识点是矩阵特征值与特征向量的概念.

解答：设λ是与ξ相对应的特征值，则$A\xi=\lambda\xi$，即$\begin{matrix}a&1&1\\4&3&-2\end{matrix}=\lambda\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}$，从而$\begin{matrix}a-2\\-2\end{matrix}=\lambda\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}$.

解得$a=3$.

分析：第 29 题考察的知识点是事件的表示．要注意准确、简洁地表示事件.

解答：事件“A、B、C至少有一个发生”的逆事件为事件“A、B、C都不发生”，即$\bar A\bar B\bar C$，所以事件“A、B、C至少有一个发生” $=\overline{\bar A\bar B\bar C}=A+B+C$.

事件“A、B、C至多有一个发生”包括事件“A、B、C有且只有一个发生”以及“A、B、C都不发生”，所以事件“A、B、C至多有一个发生”$=\bar A\bar B\bar C+A\bar B\bar C+\bar AB\bar C+\bar A\bar BC=\bar A\bar B+\bar B\bar C+\bar A\bar C$.

分析：第 30 题考察的知识点是指数分布的概率计算．要注意熟练掌握指数分布的概率密度.

解答：参数为4的指数分布的密度函数为$\varphi(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\0, & x\le0\end{cases}$.

因此$P\{|X|<1\}=\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=\int_{-1}^{0}0dx+\int_0^1 4e^{-4x}dx=-e^{-4x}|_0^1=1-e^{-4}$.

分析：第 31 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、数乘、乘法和转置）．要注意矩阵乘法不满足乘法交换律.

解答：$B^TA=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times0&1\times2+2\times1\\3\times1+0\times0&3\times2+0\times1\\5\times1+6\times0&5\times2+6\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\3&6\\5&16\end{bmatrix}$.

本题也可利用初等矩阵与初等变换的关系。注意到$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=C_{12}(2)$，所以

$$B^TA=B^TC_{12}(2)=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\\5&6\end{bmatrix}C_{12}(2)=\begin{bmatrix}1&4\\3&6\\5&16\end{bmatrix}.$$

分析：第 32 题考察的知识点是行列式的性质．要注意利用行列式的性质简化行列式的计算.

解答：由于$\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&4&0\\3&0&0\end{vmatrix}=-1\ 4\ 3=-12$，$\det A^T=\det A=-24$，

所以$\det(AA^T)=\det A\cdot\det A^T=(-12)^2=144$.

分析：第 33 题考察的知识点是非齐次线性方程组有解的判别定理.

解答：非齐次线性方程组无解的充要条件是系数矩阵A的秩$r(A)$不等于增广矩阵$\bar A$的秩$r(\bar A)$．由于$\bar A=\begin{matrix}1&2&k&1\\2&4&8&3\end{matrix}\to\begin{matrix}1&2&k&1\\0&0&8-2k&1\end{matrix}$，显然$r(\bar A)=2$，要使$r(A)\ne r(\bar A)$，必须$8-2k=0$，即$k=4$.

分析：第 34 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法．要注意掌握利用表示矩阵是否列

满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别向量组的线性相（无）关性的方法.

解答：$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&1\\0&t&-2\\1&4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&t&-2\\0&4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&t-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$r(A)<3=$向量组中向量个数，故$t-2=0$，即$t=2$.

分析：第 35 题考察的知识点是矩阵的特征值．要注意掌握一些特殊矩阵的特征值的求法.

解答：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\0&2-\lambda&2\\0&8&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\8&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-6)=0$，

解得A的三个特征值为$1,-2,6$.

分析：第 36 题考察的知识点是正态分布的概率计算公式.

解答：根据公式$P\{a<X<b\}=\Phi\ \frac{b-\mu}{\sigma}-\Phi\ \frac{a-\mu}{\sigma}$以及$\Phi(+\infty)=1$可知

$P\{X\ge8\}=0.2=1-\Phi\ \frac{8-4}{\sigma}$，得$\Phi\ \frac{4}{\sigma}=0.8$.

因此根据公式$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，并注意到$\Phi(0)=0.5$，可得

$$P\{0<X<4\}=\Phi\ \frac{4-4}{\sigma}-\Phi\ \frac{0-4}{\sigma}=\Phi(0)-1+\Phi\ \frac{4}{\sigma}=0.5-1+0.8=0.3.$$

或者利用对称性可知，$P\{X>4\}=P\{X<4\}=0.5$，所以

$$P\{0<X<4\}=P\{4<X<8\}=P\{X>4\}-P\{X\ge8\}=0.5-0.2=0.3.$$

分析：第 37 题考察的知识点是矩阵秩的计算.

解答：显然$a=1$时$r(A)=1$，与题设矛盾.

当$a\ne1$时，$A=\begin{matrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{matrix}\to\begin{matrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{matrix}\to\begin{matrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&0&2-a-a^2\end{matrix}\to\begin{matrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&0&a+2\end{matrix}$.

当且仅当$a=-2$时$r(A)=2$.

分析：第 38 题考察的知识点是二项分布的期望、方差.

解答：设X表示该生答对的题数，则$X\sim B(50,0.8)$，故$EX=50\times0.8=40$，$DX=50\ \ 0.8\ \ 0.2=8$．该生的得分为$Y=3X$，因此$EY=E(3X)=3EX=120$，$DY=D(3X)=9DX=72$，即标准差$\sqrt{DY}=\sqrt{72}=6\sqrt2$.

二、选择题（主要考察工程数学中的基本概念、基本知识和基本计算）

分析：第 1 题考察的知识点是行列式的性质．要注意区分行列式与矩阵性质上的异同.

解答：利用$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$，$|\lambda A|=\lambda^n|A|$以及$|A^{-1}|=|A|^{-1}$，可得

$|(2A)^{-1}|=|\frac12A^{-1}|=(\frac12)^2|A^{-1}|=\frac14|A|^{-1}=\frac14\times\frac12=\frac18$．故选$A$.

分析：第 2 题考察的知识点是非齐次线性方程组的解与齐次线性方程组的解之间的关系．要注意理解线性方程组的解的含义.

解答：由于$A\alpha_1=b,A\alpha_2=b,A\alpha_3=b$，所以

$A(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1-A\alpha_2+A\alpha_3=b-b+b=b,$

$A(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2-A\alpha_3=b+b-b=b,$

$A(\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)=A\alpha_1+2A\alpha_2-A\alpha_3=b+2b-b=2b,$

$A(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1-2A\alpha_2+A\alpha_3=b-2b+b=0$，故选$D$.

分析：第 3 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法．可利用表示矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别向量组的线性相（无）关性.

解答：$(k\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{matrix}$．由于可逆的表示矩阵不改变向量组的线性相（无）关性，而题中两向量组的线性相（无）关性不同，所以表示矩阵$\begin{matrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{matrix}$不可逆，即其行列式$\begin{vmatrix}k&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=0$，从而$k+1=0$，$k=-1$.故选$A$.

分析：第 4 题考察的知识点是事件的表示．要注意区别两事件A,B的和$A+B$与积AB.

解答：A_1+A_2表示事件A_1与A_2的和，即事件A_1与A_2中至少有一个发生. 故选B.

分析：第 5 题考察的知识点是二项分布的期望和方差的计算公式.

解答：$X\sim b(n,p)$时，$EX=np,\quad DX=npq$，由题可知$np=2.4,\quad npq=1.44$，解得

$q=1.44/2.4=0.6$，$p=1-q=0.4$，$n=2.4/0.4=6$. 故选B.

分析：第 6 题考察的知识点是逆矩阵的定义．要注意矩阵乘法交换律$AB=BA$未必成立.

解答：由$ABC=I$可得$BCA=I$以及$CAB=I$，所以答案是C.

分析：第 7 题考察的知识点是概率的性质．要注意减法公式$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

解答：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=a+b-c$

$P(A\bar B)=P(A-B)=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)=c-b$. 故选$B$.

分析：第 8 题考察的知识点是矩阵的基本运算（加减、乘法和转置）．要注意做矩阵运算时对矩阵的维数要求.

解答：C^T是2×4矩阵，而B是3×4矩阵，C^T的列数不等于B的行数. 故选D.

分析：第 9 题考察的知识点是逆矩阵的性质．要注意行列式与矩阵性质上的异同.

解答：由于$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$，$(-2A)^{-1}=(-2)^{-1}A^{-1}$，故选$D$.

分析：第 10 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法．要注意掌握利用表示矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别线性相（无）关性的方法.

解答：由于$(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{matrix}$

$(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$，

$(\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{matrix}$，

$(\alpha_1,2\alpha_3,3\alpha_1-4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{matrix}1&0&3\\0&0&0\\0&2&-4\end{matrix}$

四个表示矩阵中，只有第二个表示矩阵可逆，而可逆矩阵不改变向量组的线性相（无）关性，故选B.

分析：第 11 题考察的知识点是逆矩阵的定义．要注意字母代数与矩阵代数的异同.

解答：由于$A^2=I$，所以$A^{-1}=A$. 这里矩阵A是可逆的，是因为对$A^2=I$两边求行列式，并利用行列式的性质，可知$|A^2|=|A|^2=|I|=1$，解得$|A|=\ \ 1\ \ 0$. 故选C.

分析：第 12 题考察的知识点是非齐次线性方程组有解的判别定理.

解答：非齐次线性方程组有解的充要条件是系数矩阵A的秩$r(A)$等于增广矩阵$\bar A$的秩$r(\bar A)$．由于

$\bar A=\begin{matrix}1&-1&6&0\\0&4&-8&-4\\1&3&-2&-2a\end{matrix}\to\begin{matrix}1&-1&6&0\\0&4&-8&-4\\0&4&-8&-2a\end{matrix}\to\begin{matrix}1&-1&6&0\\0&4&-8&-4\\0&0&0&4-2a\end{matrix}$，

显然$r(A)=2$，要使$r(A)=r(\bar A)$，必须$4-2a=0$，即$a=2$. 故选A.

分析：第 13 题考察的知识点是向量组的线性相（无）关性的判别方法．要注意掌握利用表示矩阵是否列满秩或表示矩阵的行列式是否为零来判别向量组的线性相（无）关性的方法.

解答：A，C，D三个选项对应的行列式分别是$\begin{vmatrix}1&5&0\\2&6&0\\3&7&0\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\ne0$，$\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=\begin{matrix}1&3&3\\2&3&3\\3&3&3\end{matrix}=0$，只有第 2 个行列式非零，对应的矩阵可逆，从而相应的向量组线性无关．另外对选项B，显然有$(1,2)+(2,1)=3(1,1)$．故选C.

分析：第 14 题考察的知识点是n重贝努里试验．要注意利用逆事件来简化计算.

解答：事件“2 次重复试验中试验至少失败一次”的逆事件是事件“2 次重复试验中试验全部成功”，后者发生的概率是p^2，所以前者发生的概率是$1-p^2$．故选B.

分析：第 15 题考察的知识点是正态分布随机变量的线性函数的分布．注意正态分布随机变量的线性函数的分布仍然是正态分布，并且其期望和方差可以利用相关性质计算出来.

解答：$0=EY=E(aX+b)=aEX+b=2a+b$，

$1=DY=D(aX+b)=a^2DX=4a^2$，解得$a=\pm0.5$，$b=\mp1$．故选C.

分析：第 16 题考察的知识点是矩阵的运算律．要注意字母代数与矩阵代数的异同.

解答：由于矩阵乘法一般不满足乘法交换律，所以选项A,C,D都不正确. 但是单位矩阵与任意矩阵可交换，即$IA=AI=A$，所以$(A+I)(A-I)=A^2-I=(A-I)(A+I)$.

故选B.

分析：第 17 题考察的知识点是正态分布的概率计算．要注意利用逆事件来简化计算.

解答：根据公式$P\{a<X<b\}=\Phi\ \frac{b-\mu}{\sigma}-\Phi\ \frac{a-\mu}{\sigma}$以及$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，可知$P\{|X|>2\}=1-P\{|X|\le2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-[1-\Phi(2)]=2\Phi(2)-1$．故选$B$.

分析：第 18 题考察的知识点是指数分布的期望公式和方差公式.

解答：参数为λ的指数分布的期望$EX=\frac{1}{\lambda}$、方差$DX=\frac{1}{\lambda^2}$，所以$\frac{EX}{DX}=\lambda$. 故选D.

分析：第 19 题考察的知识点是矩阵的运算律和对称（反对称）矩阵的概念．要注意字母代数与矩阵代数的异同.

解答：因为A,B为n阶对称矩阵，即$A^T=A,B^T=B$，所以$(AB)^T=B^TA^T=BA$，但$AB\ne BA$，所以$(AB)^T\ne AB$，故选项A错；$(A-B)^T=A^T-B^T=A-B\ne-(A-B)$，

故选项B错；$[(AB)(AB)^T]^T=[(AB)^T]^T(AB)^T=(AB)(AB)^T$，即$(AB)(AB)^T$是对称矩阵，故选项$C$错；$(2A^T+3B)^T=(2A^T)^T+(3B)^T=2A+3B)^T=2A+3B$，故选$D$.

分析：第 20 题考察的知识点是事件的表示.

解答：由于b,c都有 6 种取值，所以有序数组(b,c)有 36 种可能结果. 方程$x^2+bx+c=0$有实根需满足$b^2-4c\ge0$，只有以下 19 种符合要求：$(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),$.

故选A.

第三题考察的知识点是解矩阵方程.

分析：类比字母代数的知识和技巧，要注意先化简矩阵方程，再代入数据计算．另外要注意矩阵乘法不满足交换律，以及矩阵代数运算过程中相应的变形条件是否具备.

解答：$(A+I)X=A^2-I=(A+I)(A-I)$（注意乘积的顺序！）

上式两边只要左乘$(A+I)^{-1}$，即得

$$X=A-I=\begin{matrix}2&1\\2&-1\end{matrix}.$$

由于$|A+I|=\begin{vmatrix}4&1\\2&1\end{vmatrix}=2\ne0$，因此矩阵$A+I$是可逆的.

第四题考察的知识点是解齐次线性方程组.

分析：要注意根据问题灵活选择求解齐次线性方程组的初等行变换法和行列式法，并恰当选取最简方程组中的主未知数.

解答：$|A|=\begin{vmatrix}4&-1&1\\1&2&1\\-3&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&1\\1&3&1\\-3&0&0\end{vmatrix}=0$，所以齐次线性方程组有非零解.

$A=\begin{matrix}4&-1&1\\1&2&1\\-3&3&0\end{matrix}\to\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-9&-3\\0&9&3\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&0\end{vmatrix}$

所以原方程组同解于方程组$\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=-3x_2\end{cases}$. 令$x_2=C$，则通解为$\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}=C\begin{matrix}1\\1\\-3\end{matrix}$.

第五题考察的知识点是正态分布的概率计算.

解答：根据公式$P\{a<X<b\}=\Phi\ \frac{b-\mu}{\sigma}-\Phi\ \frac{a-\mu}{\sigma}$以及$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$，并注意到$\Phi(+\infty)=1,\Phi(-\infty)=0$，可知

（1）$P\{X>3.5\}=1-\Phi\ \frac{3.5-1}{2}=1-\Phi(1.25)=0.1056$

（2）$P\{|X|\le3.5\}=\Phi\ \frac{3.5-1}{2}-\Phi\ \frac{-3.5-1}{2}=\Phi(1.25)-\Phi(-2.25)$

$=\Phi(1.25)-[1-\Phi(2.25)]=0.8822$

第六题考察的知识点是连续型随机变量的概率、期望和方差的计算，以及方差的性质.

分析：要注意概率密度取正值的区间.

解答：（1）$P\{1<X<2\}=\int_1^2(-\frac29x^2+\frac23x)dx=(-\frac{2}{27}x^3+\frac13x^2)|_1^2=\frac{13}{27}$.

（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_0^3x(-\frac29x^2+\frac23x)dx=(-\frac{1}{18}x^4+\frac29x^3)|_0^3=\frac32$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_0^3x^2(-\frac29x^2+\frac23x)dx$

$=(-\frac{2}{45}x^5+\frac16x^4)|_0^3=\frac{27}{10}$，

$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{27}{10}-(\frac32)^2=\frac{9}{20}$.

（3）$DY=D(3X-2)=3^2\times DX=\frac{81}{20}$.

第（二/四）题考察的知识点是解非齐次线性方程组.

分析：要注意掌握求解非齐次线性方程组的初等行变换法和克拉默法则，并根据问题情形灵活处理.

解答：$D=|A|=\begin{vmatrix}4&-1&1\\1&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&5\\1&3&2\\-1&0&0\end{vmatrix}=9\ne0$，根据克拉默法则，非齐次线性方程组有唯一解.

$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1\\4&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\4&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=9$，$D_2=\begin{vmatrix}4&1&1\\1&4&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1\\2&4&1\\0&0&1\end{vmatrix}=18$，

$D_3=\begin{vmatrix}4&-1&1\\1&2&4\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&1\\3&2&4\\0&1&0\end{vmatrix}=-9$，

$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=-1,$ 所以原方程组的唯一解为$\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}=\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}$.

第（五/四）题考察的知识点是矩阵特征值的计算，矩阵多项式的谱映射定理，即关于A的矩阵多项式的特

征值与A的特征值之间的关系，以及矩阵特征值的性质.

解答：（1）$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&0\\-1&3-\lambda&-1\\-5&7&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&3-\lambda&-1\\1&7&-1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&5-\lambda&-1\\0&9&-1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)(\lambda-2)^2=0$，

解得A的三个特征值为$1,2,2$.

设$f(\lambda)=1-\lambda^{-1}$，则有$f(A)=I-A^{-1}$. 按谱映射定理，可知$f(A)=I-A^{-1}$的特征值为$f(1),f(2),f(2)$，即$0,\frac12,\frac12$.

第（五/五）题考察的知识点是连续性随机变量概率密度的性质，概率计算公式，期望计算公式和方差计算公式.

分析：要注意概率密度函数取正值的区间.

解答：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_0^2axdx+\int_2^4(-\frac14x+b)dx+\int_4^{+\infty}0dx$

$=\frac12ax^2\Big|_0^2+(-\frac18x^2+bx)\Big|_2^4=2a+2b-\frac32$，

$2=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot0dx+\int_0^2x\cdot axdx+\int_2^4x(-\frac14x+b)dx+\int_4^{+\infty}x\cdot0dx$

$=\frac13ax^3\Big|_0^2+(-\frac{1}{12}x^3+\frac12bx^2)\Big|_2^4=\frac83a+6b-\frac{14}{3}$，

解得$a=\frac14,b=1$.

（2）$P\{1<X<3\}=\int_1^2\frac14xdx+\int_2^3(-\frac14x+1)dx=\frac18x^2\Big|_1^2+(-\frac18x^2+x)\Big|_2^3=\frac34$.

（3）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot0dx+\int_0^2x^2\cdot\frac14xdx+\int_2^4x^2(-\frac14x+1)dx+\int_4^{+\infty}x^2\cdot0dx$

$=\frac{1}{16}x^4\Big|_0^2+(-\frac{1}{16}x^4+\frac13x^3)\Big|_2^4=\frac{14}{3}$，

$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{14}{3}-2^2=\frac23$.